Calcolo dell'errore sulla distanza percorsa e sulla velocità

Errore sulla distanza percorsa

Per calcolare l'errore sulla distanza percorsa, ci rifacciamo alla teoria della propagazione degli errori, nella sua forma semplificata, come usualmente viene spiegata nel primo biennio del liceo, ovvero senza ricorrere alle derivate parziali. Utilizziamo il simbolo Δ per indicare l'errore. Nota la formula per calcolare la distanza: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, si calcolano gli errori di tutte le funzioni che compongono la formula, partendo dalle più interne.
Useremo le formule per ricavare gli errori assoluti sulle grandezze, senza passare per gli errori relativi.

Prenderemo come valori di partenza quelli forniti al passo 3 e 4 dell'attività:
$x_1 = 887,\ x_2 = 724,\ y_1 = 409,\ y_2 = 387$
$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 4$
$\Delta y_1 = \Delta y_2 = 3$

1) Il primo passaggio è calcolare l'errore sulla differenza tra le coordinate. Secondo la teoria degli errori, l'errore sulla somma o sulla differenza di due grandezze è la somma degli errori degli addendi.

Errore sulla differenza delle ascisse:
$\Delta(x_2 - x_1) = \Delta x_2 + \Delta x_1 = 4 + 4 = 8$
Errore sulla differenza delle ordinate:
$\Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 + \Delta y_1 = 3 + 3 = 6$

2) Si calcola ora l'errore sui loro quadrati, secondo la formula dell'errore di una potenza, cioè $\Delta[x^n] = nx^{n-1}\Delta x$.

$\Delta[(x_2 - x_1)^2] = 2(x_2 - x_1)\Delta(x_2 - x_1) = 2(x_2 - x_1)(\Delta x_2 + \Delta x_1) = 2608$
$\Delta[(y_2 - y_1)^2] = 2(y_2 - y_1)\Delta(y_2 - y_1) = 2(y_2 - y_1)(\Delta y_2 + \Delta y_1) = 264$

3) Bisogna ora sommare i quadrati, utilizzando di nuovo la formula dell'errore sulla somma di due grandezze:
$\Delta[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = \Delta[(x_2 - x_1)^2] + \Delta[(y_2 - y_1)^2] = 2608 + 264 = 2872$

4) Infine, si calcola l'errore sulla radice quadrata utilizzando quindi la stessa formula del passaggio 2, con $n = \frac{1}{2}$:

$$\Delta[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}] = \Delta[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\Delta[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{2}\frac{2872}{164} = 8,756... = 9$$

Conclusioni per la distanza

La distanza ottenuta risulta $d = (165 \pm 9)$ pixel, che corrisponde, ricordando la scala $1\text{px} = 620\ \text{km}$, a $d = (102300 \pm 5580)$ km. E' importante sottolineare che questa scrittura (valore con errore assoluto) in realtà non è corretta per la fisica sperimentale: bisogna approssimare l'errore alla prima cifra significativa, e il valore alla cifra corrispondente a quella dell'errore. Quindi la scrittura corretta diventa:

$$d = (102000 \pm 6000)\ \text{km}$$

Si può infine calcolare l'errore relativo della misura:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{6000}{102000} = 0,06 = 6\%$$

Errore sulla velocità

Per calcolare l'errore sulla velocità bisogna considerarla come quoziente di due grandezze.

$$v = \frac{d}{t}$$

dove con t indichiamo l'intervallo di tempo. Si può utilizzare la formula dell'errore del quoziente tra due grandezze:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t}$$

che, se si considera l'intervallo di tempo con errore trascurabile rispetto a quello della distanza ($\Delta t/t = 0$), diventa:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta d}{d} = 0,06$$

da cui si ottiene, invertendo la formula e ricordando che $v = v_{media} = 72400\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$:

$$\Delta v = v\ \frac{\Delta d}{d} = 72400 * 0,06 = 4344\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Conclusioni per la velocità

La velocità ottenuta, con il suo errore assoluto e con la scrittura corretta illustrata in precedenza, diventa:

$$v_{media} = (72000 \pm 4000)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$